

Fachbereich SciTec

Theoretische Physik WS 2010/2011

Prof. Dr. Bernd Ploss

Peter Haupt
Johannes Capraro

14. Oktober 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Hilfsmittel aus der Vektoranalysis	6
1.1	Skalarfelder, Vektorfelder und deren Veranschaulichung	6
1.1.1	Skalarfelder	6
1.1.2	Vektorfelder	6
1.2	Integralbildung auf Feldern	7
1.2.1	Linienintegral	7
1.2.2	Zirkulation	7
1.2.3	Flächenintegral	8
1.2.4	Volumenintegral	8
1.3	Verknüpfung von Feldern über Integralbildung	9
1.3.1	Verknüpfung eines Skalarfeldes $\Phi(\vec{r})$ mit einem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$	9
1.3.2	Verknüpfung zweier Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$	9
1.3.3	Verknüpfung von Skalarfeld $f(\vec{r})$ mit Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r})$	10
1.4	Zylinder- und Kugelkoordinaten	11
1.4.1	Zylinderkoordinaten	11
1.4.2	Kugelkoordinaten	12
2	Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum für Ladungen und Ströme	14
3	Elektrostatik	16
3.1	Das elektrische Potential für vorgegebene Ladungsverteilungen	16
3.2	Beispiele zur Lösung der Laplace- und Poissongleichung	17
3.3	Die Dirac'sche Deltafunktion	19
3.4	Verhalten von Φ , \vec{E} an Begrenzungen -etwas Potentialtheorie-	20
3.5	Das Feld zweier Punktladungen, Multipole	23
3.6	Multipolentwicklung für eine beliebige Ladungsverteilung	26
3.7	Feld einer Metallkugel in einem angelegtem homogenen Feld	27
3.8	Energie einer Ladungsverteilung	28

4	Das von stationären Strömen erzeugte magnetische Feld	31
4.1	Vektorpotential (\vec{A})	31
4.2	Beispiele für das Vektorpotential	33
5	Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder	36
6	Quanten	39
6.1	Einordnung der Quantenmechanik	39
6.2	Beispiele für Quanteneffekte	39
7	Dualismus Welle-Teilchen	42
7.1	Doppelspalt	42
7.2	Spektralzerlegung und Fouriertransformation	42
8	Materiewellen und Schrödingergleichung	45
8.1	Realisierung des Konzeptes der Materiewellen	45
8.2	Teilchen als Wellenpakete	46
8.3	Heisenbergsche Unschärferelation	46
8.4	Zustand, Größe, Wert einer Größe	46
8.5	Zeitunabhängige Schrödingergleichung	49
8.6	Stufenpotential	49

Einführung

Grundbegriffe und Maxwell-Gleichungen

Teilchen:

	Ladung q	magn. Moment μ
Elektron, Positron	$\mp e$	$1,00115966 \mu_B$
Neutron (n)	0	$-1,91315 \frac{m_e}{m_n} \mu_B$
Proton (p)	e	$2,79278 \frac{m_e}{m_p} \mu_B$
Müonen (μ^\pm)	$\pm e$	$1,00116 \frac{m_e}{m_\mu} \mu_B$
Pionen (π^\pm, π^0)	$\pm e, 0$	0

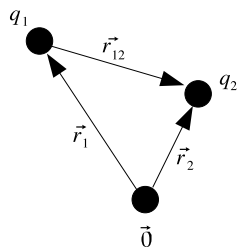
$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e} = 9,27403 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Feldkonstanten:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot 10^7 \frac{\text{A}^2}{\text{N}} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

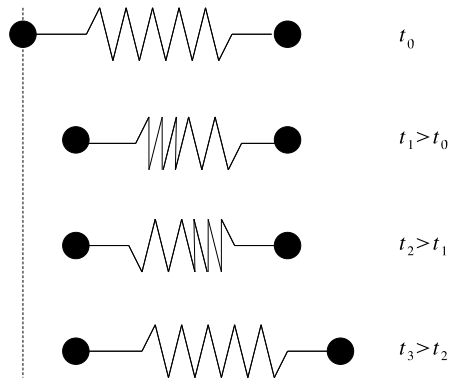
Coulomb-Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{e}_{12}$$



- in dieser Form Fernwirkungsgesetz
- keine Aussage über zeitliche Abhängigkeiten (Verzögerung etc.)

- Federsystem als Beispiel für Nahwirkungsgesetz
- zeitliche Abhängigkeit bei Dehnung bzw. Stauchung vorhanden



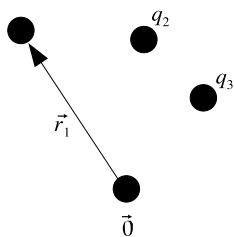
$$\vec{F}_1(t) = q_1[\vec{E}(\vec{r}_1, t) + \vec{v}_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1, t)]$$

- \vec{E} bzw. \vec{B} abhängig vom gewählten Bezugssystem

Bewegungsgleichung:

$$\vec{F}_1(\vec{r}_1, t) = \frac{d}{dt} \frac{m_1 \vec{v}_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$$

Überlagerungsprinzip:



$$\vec{E}(\vec{r}_1) = \vec{E}_2(\vec{r}_1) + \vec{E}_3(\vec{r}_1) + \dots$$

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \vec{B}_2(\vec{r}_1) + \vec{B}_3(\vec{r}_1) + \dots$$

Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

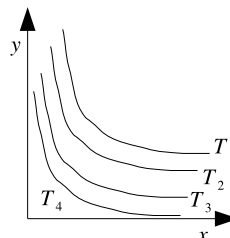
$$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

1 Mathematische Hilfsmittel aus der Vektoranalysis

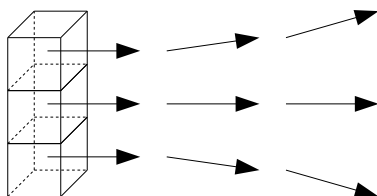
1.1 Skalarfelder, Vektorfelder und deren Veranschaulichung

1.1.1 Skalarfelder

- jeder Raumpunkt wird auf eine Zahl abgebildet $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\Phi(x,y,z)} \mathbb{R}$
- wenn $\Phi(x, y) = \text{const} \rightarrow$ Linien
- wenn $\Phi(x, y, z) = \text{const} \rightarrow$ Flächen
- beliebig viele zur Visualisierung möglich

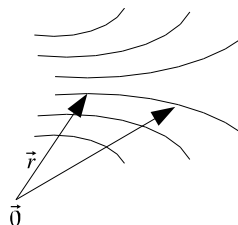


1.1.2 Vektorfelder



- jeder Raumpunkt wird auf einen Vektor abgebildet $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\Phi(x,y,z)} \mathbb{R}^3$
- Visualisierung durch Darstellung einzelner Vektoren bezogen auf ein Raumelement

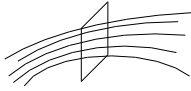
- τ könnte Zeit spezifizieren
- c könnte „Nummer“ der Feldlinie angeben
- beliebig viele Feldlinien im Raum denkbar und durch Feldliniengleichung beschreibbar



$$\vec{r} = \vec{r}(\tau, c) \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \vec{r}(\tau, c) = \vec{E}(\vec{r}(\tau, c))$$

- Einschränkung: $|\vec{E}| \neq 0$



- Dichte bzw. Anzahl der Feldlinien pro Volumenelement als Maß für Feldstärke
- bei Darstellung senken- bzw. quellenfreier Felder Anfang bzw. Ende einer Feldlinie möglich (bedingt durch ganze Anzahlen der Feldlinien)

1.2 Integralbildung auf Feldern

1.2.1 Linienintegral

$$\gamma = \int_{\mathcal{L}} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{s} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{E}(\vec{r}(\tau)) \cdot \dot{\vec{r}} \, d\tau$$

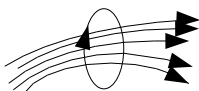
Bsp.:

$$\text{Vektorfeld: } \vec{E} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ x^2 + y^2 - z \end{pmatrix} \quad \text{Kurve } \mathcal{L} : \quad \vec{r} = \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} y \\ -x \\ x^2 + y^2 - z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^1 (2\tau - 2\tau + 3\tau^2 + 12\tau^2 - 9\tau) \, d\tau \\ &= \int_0^1 (15\tau^2 - 9\tau) \, d\tau = \left. \frac{15}{3}\tau^3 - \frac{9}{2}\tau^2 \right|_0^1 = 0,5 \end{aligned}$$

1.2.2 Zirkulation

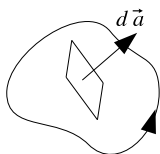
$$\Gamma = \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{s}$$



- unabhängig von Anfangspunkt
- abhängig vom Durchlaufsin

1.2.3 Flächenintegral

$$\Phi = \iint \vec{E} \, d\vec{A} = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \vec{E}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \, dudv$$



- von der Spitze des Vektors $d\vec{a}$ aus gesehen wird die Randkurve im mathematisch positiven Sinn durchlaufen
- bei geschlossener Fläche (Volumenbereich) Orientierung von $d\vec{a}$ nach außen

Bsp.:

$$\text{Vektorfeld: } \vec{E} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \quad \text{Ebene } \mathcal{E} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{array}$$

$$\mathcal{E} : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s-t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-s} \begin{pmatrix} 1-s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \, dsdt = \int_0^1 \int_0^{1-s} (1-s-t+s+t) \, dsdt = 0,5$$

1.2.4 Volumenintegral

$$\iiint \Phi(\vec{r}) \, dV = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \Phi(\vec{r}(x, y, z)) \, dzdydx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \, \Phi(\vec{r}(x, y, z))$$

$$\iiint \Phi(\vec{r}) \, dV = \iiint \Phi(\vec{r}(u, v, w)) \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right|}_{\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|} \, dudvdw$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Funktional- bzw.} \\ \text{Jacobi-Determinante,} \\ \text{kartesischer Fall} \end{array}$$

1.3 Verknüpfung von Feldern über Integralbildung

1.3.1 Verknüpfung eines Skalarfeldes $\Phi(\vec{r})$ mit einem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \text{grad } \Phi(\vec{r})$$

Bedingung: Für jeden Weg \mathcal{L} von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 gilt:

$$\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = \int_{\mathcal{L}} \vec{A}(\vec{r}) \, d\vec{s}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \text{grad } \Phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \Phi$$

Eigenschaften:

- Φ bestimmt \vec{A} eindeutig
- umgekehrt ist Φ bis auf Konstante durch \vec{A} bestimmt
- notwendige und hinreichende Bedingung:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{A}(\vec{r}) \, d\vec{s} \quad \text{für jede geschlossene Kurve } \mathcal{L} = 0$$

- $\vec{A}(\vec{r})$ enthält keine geschlossenen Feldlinien

1.3.2 Verknüpfung zweier Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad \text{engl.: } \vec{B}(\vec{r}) = \text{curl } \vec{A}(\vec{r})$$

Bedingung: Für alle Flächen \mathcal{F} , die von geschlossener Kurve \mathcal{L} berandet werden gilt:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{A}(\vec{r}) \, d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}(\mathcal{L})} \vec{B}(\vec{r}) \, d\vec{F} \quad \text{Stokescher Satz}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} P(\vec{r}) \\ Q(\vec{r}) \\ R(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- \vec{A} bestimmt \vec{B} eindeutig, umgekehrt nicht
- falls $\vec{A} = \text{grad } \Phi \rightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot grad } \Phi = 0$
- $\oiint \vec{B}(\vec{r}) d\vec{F} = 0$

1.3.3 Verknüpfung von Skalarfeld $f(\vec{r})$ mit Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r})$

$$f(\vec{r}) = \text{div } \vec{B}(\vec{r})$$

Bedingung: Für jedes Volumen \mathcal{V} gilt:

$$\oiint_{\mathcal{F}} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{A} = \iiint_{\mathcal{V}(\mathcal{F})} f(\vec{r}) dV$$

$$f(\vec{r}) = \text{div } \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} P(\vec{r}) \\ Q(\vec{r}) \\ R(\vec{r}) \end{pmatrix} = (P_x + Q_y + R_z)$$

Eigenschaften:

- \vec{B} bestimmt f eindeutig
- falls \vec{B} als Rotation darstellbar $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$
 $\hookrightarrow f = \text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} = 0$

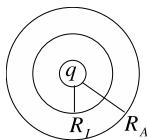
Voraussetzung: keine Singularitäten

a) Punktladung eines Coulombfeldes bei $\vec{r} = \vec{0}$

$$\vec{E}(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{div } \vec{E} = 0 \text{ für } \vec{r} \neq \vec{0}$$

geschlossene Kugeloberfläche um $\vec{r} = \vec{0}$ mit Radius R

$$\oiint \vec{E} d\vec{F} = \oiint \frac{1}{R^2} |d\vec{F}| = \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi$$



$$\oiint_{\mathcal{F}(\mathcal{R}_A)} \vec{E} d\vec{F} - \oiint_{\mathcal{F}(\mathcal{R}_I)} \vec{E} d\vec{F} = 0$$

b) Potentialwirbel

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{\omega}(\rho) = \frac{\Gamma_0}{2\pi\rho^2} \vec{e}_z \quad \text{wobei} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \frac{\Gamma_0}{2\pi\rho^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\Gamma_0}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

$$\oint \vec{v} d\vec{s} = \oint \frac{\Gamma_0}{2\pi} d\varphi = \Gamma_0 \quad (\text{unabhängig vom Radius } R \text{ des Weges})$$

$\vec{v}(\vec{r})$ hat geschlossene Feldlinien

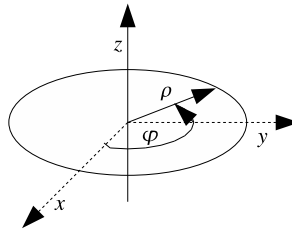
$$\hookrightarrow \vec{v}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A} \quad \vec{A} = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \vec{e}_z$$

für $\rho > 0$: $\vec{v}(\vec{r})$ besitzt Potential

1.4 Zylinder- und Kugelkoordinaten

1.4.1 Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$



$$\text{kartesisch} \rightarrow \text{zylindrisch} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{zylindrisch} \rightarrow \text{kartesisch} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

$$d\vec{s} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} \right| = \rho \rightarrow dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

$$\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

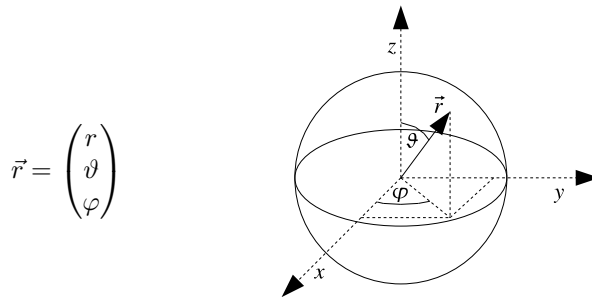
$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\varphi) - \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1.4.2 Kugelkoordinaten



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

kartesisch \rightarrow kugelig

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \end{pmatrix}$$

kugelig \rightarrow kartesisch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y\end{aligned}$$

$$d\vec{s} = dr \vec{e}_r + r d\vartheta \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} \right| = r^2 \sin \vartheta \quad \rightarrow \quad dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta B_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi$$

$$\text{rot } \vec{B} = \nabla \times \vec{B}$$

$$= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (B_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial B_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \right) \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\vartheta) - \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1 \cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

2 Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum für Ladungen und Ströme

a) Gaußsches Gesetz

$$\oiint_{\mathcal{F}} \vec{E} \, d\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) \, dV$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

b) Induktionsgesetz

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \, d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{F}} \vec{B} \, d\vec{F}$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

c) Ampere'sches Gesetz

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \, d\vec{s} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{F}} \vec{E} \, d\vec{F} + \mu_0 \iint_{\mathcal{F}} \vec{j} \, d\vec{F}$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$$

d)

$$\oiint_{\mathcal{F}} \vec{B} \, d\vec{F} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

jetzt div auf (c):

$$\underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}}_0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ (a)}}$$
$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$$
$$\downarrow \iiint dV$$
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV = - \oint_{\mathcal{F}} \vec{j} d\vec{F}$$

↔ Gesetz der Ladungserhaltung somit in Maxwell-Gleichungen enthalten

3 Elektrostatik

3.1 Das elektrische Potential für vorgegebene Ladungsverteilungen

$$\begin{aligned} \text{Voraussetzung: } \quad \frac{d}{dt} \vec{\rho} = \vec{0} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{j} = \vec{0} \quad \rightarrow \\ \vec{B} = \vec{0} \quad \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \vec{E}$ als Gradient eines Potentials darstellbar: $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$

$$\text{Poisson-Gleichung: } \text{div } \vec{E} = -\text{div grad } \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Punktladung q bei $\vec{r}' = \vec{0}$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

- Punktladungsverteilung

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

- Flächenladungsverteilung

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathcal{F}} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} |dF'|$$

- Linienladungsverteilung

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} |ds'|$$

3.2 Beispiele zur Lösung der Laplace- und Poissongleichung

a) homogen geladene Platte in x-z-Ebene

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(y) \quad \sigma = \text{const}$$

für $y \neq 0$:

$$\Delta\Phi = \Phi_{yy} = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi = ay + b$$

$$y > 0 : \quad \Phi^+ = ay + b$$

$$y < 0 : \quad \Phi^- = \bar{a}y + \bar{b}$$

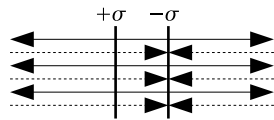
spiegelsymmetrisches Problem $\rightarrow \bar{a} = -a \quad \bar{b} = b$

$$\vec{E}(y) = -a \operatorname{sgn} y \vec{e}_y$$

betrachten Flächenstück auf Platte, da $\sigma = \text{const}$ kann $dF \rightarrow \Delta F$;
jetzt Anwendung des Gaußschen Gesetzes:

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{F}} \vec{E} \cdot d\vec{F} &= -a\Delta F - a\Delta F = -2a\Delta F \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, dV &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \Delta F \\ \hookrightarrow a &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ b &\text{ unbestimmt} \end{aligned}$$

Bsp. Plattenkondensator



$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ für zwei Platten mit $+\sigma$ bzw. $-\sigma$
Felder überlagern (Superpositionsprinzip)

b) homogen geladene Kugel mit Radius R Gesamtladung:

$$Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(|\vec{r}|) \quad \Delta\Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \begin{cases} -\frac{\rho}{\varepsilon_0} & , r \leq R \\ 0 & , r > R \end{cases}$$

$r \leq R$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} & \rightarrow & \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 \\ \xrightarrow{\int dr} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{r^3}{3} + C_1 & \rightarrow & \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{r}{3} + C_1 \frac{1}{r^2} \\ \xrightarrow{\int dr} \Phi &= -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2 \end{aligned}$$

$r > R$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= 0 & \xrightarrow{\int dr} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= D_1 \\ \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{D_1}{r^2} & \xrightarrow{\int dr} \Phi &= -\frac{D_1}{r} + D_2 \end{aligned}$$

Konstantenbestimmung:

$$\text{wählen } \Phi = 0 \text{ für } r \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad \Phi = D_2 = 0$$

$$\text{für } r = 0 \text{ muß } \Phi \text{ endlich sein, da keine Punktladung} \quad \rightarrow \quad C_1 \stackrel{!}{=} 0$$

für $r = R$ muß Φ stetig sein

$$\rightarrow -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 + C_2 = -\frac{D_1}{R}$$

für $r = R$ muß \vec{E} stetig sein

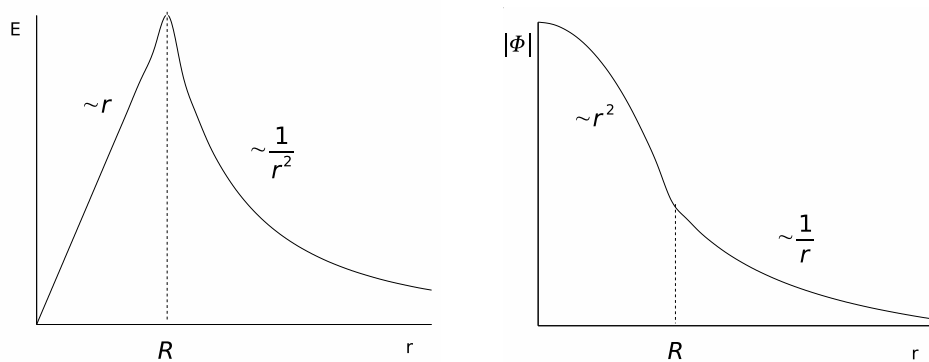
$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R &= -\frac{D_1}{R^2} & \rightarrow & D_1 = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0} R^3 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \\ \rightarrow C_2 &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} R^2 \end{aligned}$$

$r \leq R$:

$$\Phi = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} R^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left(-\frac{r^2}{3} + R^2 \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

$r > R$:

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



3.3 Die Dirac'sche Deltafunktion

betrachten Punktladung q bei $\vec{r} = \vec{0} \rightarrow \rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r})$

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & , |r| \neq 0 \\ \infty & , |r| = 0 \end{cases} \quad \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r}) dV = 1$$

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

formal $\frac{1}{r}$ bei $r = 0$ differenzierbar

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$$

betrachten $\frac{1}{r}$ bei Radius R

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \Delta \frac{1}{r} dV &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} dV = \\ \oint_{\mathcal{F}} \operatorname{grad} \frac{1}{r} dF &= -\frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi \end{aligned}$$

jetzt bei Radius $\rightarrow 0$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \Delta \frac{1}{r} dV = \iiint_{\mathcal{V}} -4\pi \delta(\vec{r}) dV = -4\pi \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \delta(\vec{r}) dV}_1$$

Eigenschaften der Deltafunktion:

a)

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & , \text{für } i = k \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_i = \sum_k \delta_{ik} f_k$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x) dx$$

b)

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

c)

$$\delta'(x) : \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta'(x - y) dy = f'(x)$$

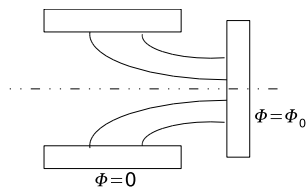
3.4 Verhalten von Φ , \vec{E} an Begrenzungen -etwas Potentialtheorie-

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Problem: oft ρ nicht vorgegeben, sondern z.B:

- Φ auf Begrenzungen
- Normalkomponente von \vec{E}

Bsp. Kondensator, im Inneren ladungsfrei



Potentialtheorie:

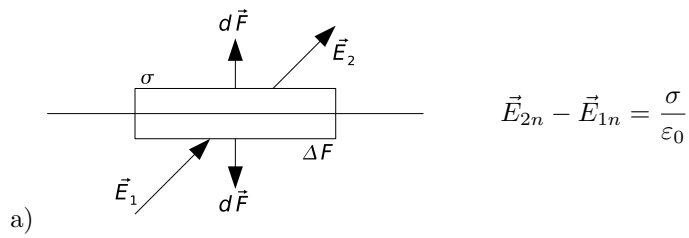
Durch Vorgabe von Φ oder der Normalableitung von Φ auf der Oberfläche eines Volumens, ist Φ im gesamten Volumen eindeutig definiert.

Wenn Ladung im Volumen vorhanden ist, dann ist das Gesamtpotential gleich der Summe der Einzelpotentiale:

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\Delta\Phi = 0$$

Einfluß von Begrenzungen auf \vec{E} oder Φ :



a)

Beweis:

$$\oiint_{\mathcal{F}} \vec{E} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{2n} \Delta\vec{F} - \vec{E}_{1n} \Delta\vec{F} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta\vec{F}$$

↑
nur Normalkomponente, da
 $\vec{E}_{2t} \cdot \Delta\vec{F} = 0$

b) \vec{E} im Inneren von Metall: $\vec{E} = \vec{0}$

↔ Oberfläche eines Metalls ist Äquipotentialfläche

Beweis:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

↑
elektr. Leitfähigkeit

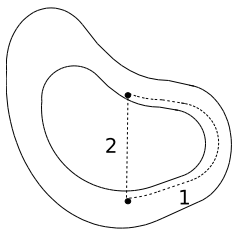
↔ \vec{E}_t im Inneren $\vec{0} \rightarrow \vec{E}_t$ außen auch $\vec{0}$

↔ Feldlinien treffen senkrecht auf Metalloberfläche

c) Ladungen sitzen auf der Oberfläche eines Metalls

$$\underbrace{\text{div } \vec{E}}_{0 \text{ für } \vec{E}=\vec{0}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

d) hohler Metallkörper, im Inneren ladungsfrei:



$\vec{E} = \vec{0}$ im Inneren

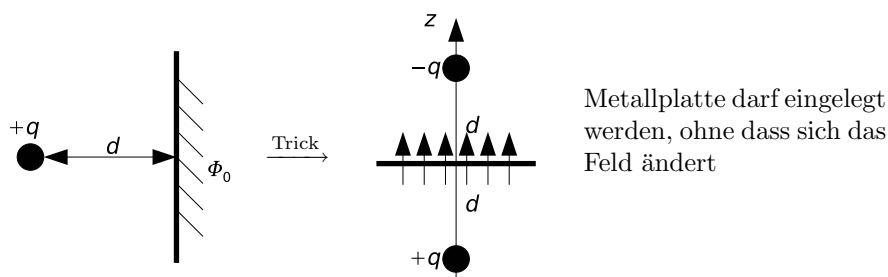
Beweis:

$$\oint_1 \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \oint_2 \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \text{da keine Potentialdifferenz auf Oberfläche}$$

↓
Feldfrei

Potentialtheorie: $\Delta\Phi = 0 \xrightarrow{?} \Phi(\vec{r})$

a) Methode der Spiegelladung



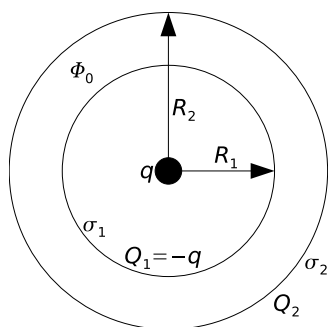
Metallplatte darf eingelegt werden, ohne dass sich das Feld ändert

rotationssym. um z-Achse

b) Versuch durch Superposition von Lösungen $\Phi_n(\vec{r})$

$$\Phi = \sum_n c_n \Phi_n(\vec{r}) \quad : \Delta\Phi = 0$$

Bsp. Ladung in Metallkugel



$$\Delta\Phi = 0 \quad \Phi = \frac{C}{r} + D$$

$$Q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1 \quad Q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2$$

$0 < r \leq R_1$:

$$\Phi_1 = \frac{C_1}{r} + D_1 \quad C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \quad \Phi_1(R_1) = \Phi_0 = \frac{C_1}{R_1} + D_1$$

$$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) + \Phi_0 \quad \vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$R_1 < r < R_2$:

$$\Phi_2 = \Phi_0$$

$r \geq R_2$:

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \frac{C_3}{r} + D_3 & \Phi_3(R_2) &\stackrel{!}{=} \Phi_0 & C_3 &= R_2(\Phi_0 - D_3) \\ \Phi_3 &= (\Phi_0 - D_3)\frac{R_2}{r} + D_3 & E_3 &= (\Phi_0 - D_3)\frac{R_2}{r^2} \vec{e}_r & D_3 &\stackrel{r \rightarrow \infty}{=} 0 \\ Q_2 &= 4\pi\epsilon_0 R_2 \Phi_0 \end{aligned}$$

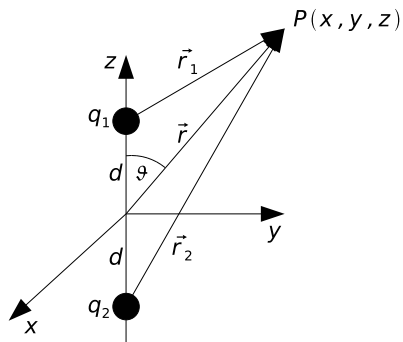
Metallkugel geerdet:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 0 & Q_2 &= 0 & \Phi_3 &= 0 \text{ für } r > R_2 \\ E_3 &= 0 \end{aligned}$$

Metallkugel isoliert:

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= 0 & Q_2 &= -Q_1 = Q \\ \Phi_0 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} & \Phi_3 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

3.5 Das Feld zweier Punktladungen, Multipole



$$\begin{aligned} q_1 &= \pm q_2 \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2} = \sqrt{r^2 + d^2 - 2zd} \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2} = \sqrt{r^2 + d^2 + 2zd} \end{aligned}$$

jetzt Φ für $r \gg d$:

$$r_{1,2} = \sqrt{r^2 + d^2 \mp 2zd} = r \sqrt{1 + \underbrace{\frac{d^2}{r^2} \mp 2\frac{d}{r} \cos \vartheta}_{\ll 1}}$$

betrachten:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 \dots$$

setzen:

$$\xi = \cos \vartheta \quad \eta = \frac{d}{r}$$

$$\frac{r}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi\eta + \eta^2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(-2\xi\eta + \eta^2) + \frac{3}{8}(-2\xi\eta + \eta^2)^2 - \frac{15}{48}(-2\xi\eta + \eta^2)^3 \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n P_n(\xi) = \underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{\xi}_{P_1} \eta + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi^2\right)}_{P_2} \eta^2 + \dots$$

$$P_0 = 1 \quad P_1 = \xi \quad P_2 = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2} \quad P_3 = \frac{5}{2}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi$$

P_n - Legendre - Polynome

Eigenschaften:

$$P_n(1) = 1 \quad P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n$$

$$P_n(-\xi) = (-1)^n P_n(\xi)$$

betrachten $q_1 = q$; $q_2 = \pm q$:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^n P_n \pm \left(\frac{-d}{r}\right)^n P_n$$

jetzt $q_2 = -q$:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{2n-1} P_{2n-1}$$

jetzt $q_2 = +q$:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{2n} P_{2n}$$

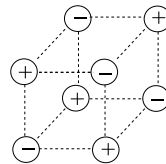
allgemein:

$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_n}{r^{n+1}} P_n$	- Potential eines Multipols
$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n$	- gesamtes Potential
$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r}$	- Monopol
$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \cos \vartheta$	- Dipol $Q_1 = 2qd = \vec{p}$
$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right)$	- Quadrupol z.B. CO ₂
$\Phi_3 = \dots$	- Oktopol
$\Phi_n = \dots$	- 2 ⁿ - pol

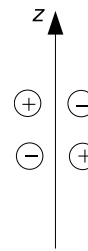
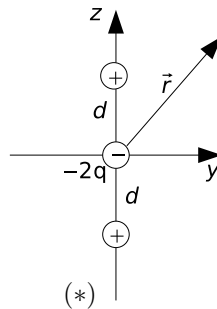
Dipolanordnung:



Oktopolanordnung:

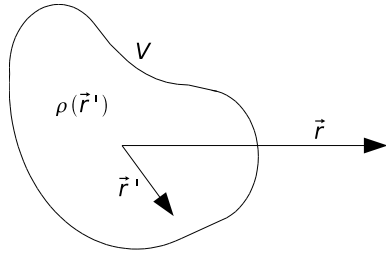


Quadrupolanordnungen:



$$(*) \quad \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2qd^2}{r^3} P_2 + \frac{2qd^3}{r^5} P_3 + \dots \right)$$

3.6 Multipolentwicklung für eine beliebige Ladungsverteilung



$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos\theta}$$

$$= r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos\theta}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos\theta \right] + \frac{3}{8} [\dots]^2 \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{r'}{r} \cos\theta + \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{3}{2} \frac{(\vec{e}_r \cdot \vec{r}')^2}{r^2} \right] \dots \right\}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r} \iiint_V \rho(\vec{r}') dV'}_{Q_0=Q^{(0)}} + \frac{1}{r^2} \iiint_V \rho(\vec{r}') (\vec{e}_r \cdot \vec{r}') dV' + \frac{1}{2r^3} \iiint_V \rho(\vec{r}') [3(\vec{e}_r \cdot \vec{r}')^2 - r'^2] dV' \dots \right\}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q_0}{r} + \frac{\sum_{i=1}^3 x_i Q_i^{(1)}}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{1}{r^5} \sum_{i,k=1}^3 Q_{ik}^{(2)} x_i x_k + \dots \right\}$$

wenn:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

dann:

$$Q_i^{(1)} = \iiint_V \rho(\vec{r}') x'_i dV'$$

$$Q_{ik}^{(2)} = \iiint_V \rho(\vec{r}') \left[x'_i x'_k - \frac{1}{3} (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) \delta_{ik} \right] dV'$$

Eigenschaften des Quadrupolmomentes:

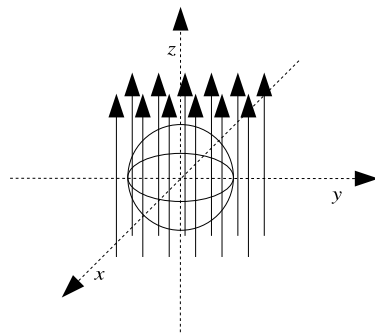
- Tensor 2. Stufe
- symmetrisch ($Q_{ik}^{(2)} = Q_{ki}^{(2)}$)
- Spur $Q^{(2)} = 0$
- $Q^{(2)}$ hat 5 unabhängige Elemente

Für jeden Tensor 2. Stufe existiert ein besonders angepasstes Koordinatensystem. Eines in den der Tensor nur noch Diagonalelemente enthält. Dieses kann durch entsprechende Rotationen (3 Freiheitsgrade) erzeugt werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & 0 - Q_{11} - Q_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 - Q_{11} - Q_{22} \end{pmatrix}$$

3.7 Feld einer Metallkugel in einem angelegtem homogenen Feld



Ohne Metallkugel:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \vec{e}_z \quad \Phi(\vec{r}) = -E_0 z$$

Kugel mit Radius R_0
und Mittelpunkt $\vec{r} = \vec{0}$

- Kugelpotential wird sich einstellen $\Phi(r \leq R_0) = 0$
- E-Feld wird verbogen, Feldlinien treffen senkrecht auf Kugel
- Kugel ungeladen $Q = 0$
- Monopolmoment nicht vorhanden

Wählen Dipolansatz, da Ladungsschwerpunkte auf Kugeloberfläche verschoben werden:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$\Phi = -E_0 z + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = -E_0 z + \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}$$

$$\xrightarrow{KK} \Phi = -E_0 r \cos \vartheta + \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \vartheta$$

$$= \left(-E_0 r + \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right) \cos \vartheta$$

Randbedingung $\Phi = 0$ für $r = R_0$

$$\Phi(R_0) = \underbrace{\left(-E_0 R_0 + \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_0^2} \right)}_{\stackrel{!}{=} 0} \cos \vartheta \stackrel{!}{=} 0$$

$$\hookrightarrow p_z = 4\pi\epsilon_0 E_0 R_0^3$$

Erzeugung eines präzisen Dipolfeldes, da Randbedingung exakt erfüllt

3.8 Energie einer Ladungsverteilung

$$W = \int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad q_1 \text{ bei } \vec{r}_1 = \vec{0} \text{ dann } q_2 \text{ nach } \vec{r}_2$$

$$W = \int_{\mathcal{L}} q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_2 \quad \mathcal{L} : \infty \rightarrow \vec{r}_2$$

$$W = - \int_{\mathcal{L}} q_2 \text{grad } \Phi_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_2 = -q_2 [\Phi_1(\infty) - \Phi_1(\vec{r}_2)] = q_2 \Phi_1(\vec{r}_2)$$

$$\uparrow$$

$$\Phi_1(\infty) = 0$$

Ladung von ∞ nach erforderliche Arbeit

1	\vec{r}_1	0
2	\vec{r}_2	$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 } q_2$
3	\vec{r}_3	$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{ \vec{r}_1 - \vec{r}_3 } + \frac{q_2}{ \vec{r}_2 - \vec{r}_3 } q_3 \right]$
\vdots	\vdots	\vdots
N	\vec{r}_N	$W_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{q_n}{ \vec{r}_n - \vec{r}_N } q_N$

gesamte Arbeit:

$$W = \sum_{m=1}^N W_m = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_m q_n}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_m q_n}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|}$$

Potential von Punktladungen, die momentan betrachtete aber ausgenommen:

$$\tilde{\Phi}(\vec{r}_m) = \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_n}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|} \quad \rightarrow \quad W = \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} q_m \tilde{\Phi}(\vec{r}_m)$$

jetzt kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\tilde{\Phi}(\vec{r}_m) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\vec{r}' \neq \vec{r})} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \Phi(\vec{r}) \quad W = \frac{1}{2} \iiint \Phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV$$

$$\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = -\epsilon_0 \Delta \Phi(\vec{r}) \quad W = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint \Phi(\vec{r}) \Delta \Phi(\vec{r}) dV$$

$$\Phi(\vec{r}) \Delta \Phi(\vec{r}) = \operatorname{div} (\Phi \operatorname{grad} \Phi) - (\operatorname{grad} \Phi)^2 = -\operatorname{div} (\Phi \vec{E}) - |\vec{E}|^2$$

$$\hookrightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \operatorname{div} (\Phi \vec{E}) dV + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint |\vec{E}|^2 dV$$

betrachten Kugel mit Radius R :

$$\iiint_{V_K} \operatorname{div} (\Phi \vec{E}) dV = \oiint_{F_K} \Phi \vec{E} d\vec{F}$$

wenn $R \gg$ Ausdehnung der Ladungsverteilung:

$$\Phi \sim \frac{1}{r}$$

$$|\vec{E}|^2 \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\hookrightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\vec{E}|^2 dV$$

Gesamtenergie

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$$

lokale Energiedichte

$$\hookrightarrow W = \iiint_{\mathbb{R}^3} w dV \geq 0$$

4 Das von stationären Strömen erzeugte magnetische Feld

4.1 Vektorpotential (\vec{A})

•

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0; & \oiint \vec{B} d\vec{F} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; & \text{statisch: } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}; & \oint \vec{B} d\vec{r} &= \mu_0 \iint \vec{j} d\vec{F} = \mu_0 I \end{aligned}$$

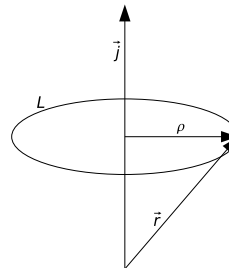
- I=Strom
- j=Stromdichte
- Einfache Fälle:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} d\vec{r} = B_t(\vec{r}) \int_{\mathcal{L}} |d\vec{r}| = \mu_0 I$$

- Wahl von \mathcal{L} so, dass Integrand konstant
- t=Tangentialkomponente

- Beispiel: unendlich langer, dünner, stromdurchflossener Draht

$$\begin{aligned} B(\vec{r}) &= B(\rho, \varphi) = B_\varphi e_\varphi \\ \oint \vec{B} d\vec{r} &= B_\varphi 2\pi\rho = \mu_0 I \\ B(\rho, \varphi) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} e_\varphi \end{aligned}$$



- A) $\operatorname{div} \vec{B} = 0; \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$
 B) $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}; \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi &= 0; (\Phi = \text{beliebiges Skalarfeld}) \\ \vec{A}' &:= \vec{A} + \operatorname{grad} \Phi \\ \operatorname{rot} \vec{A}' &= \operatorname{rot} \vec{A} \end{aligned}$$

- Coulombbeziehung: $\text{div grad } \Phi = \Delta\Phi = 0$

$$\Rightarrow \Delta \vec{A} = -\text{rot rot } \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\Delta A_x = -\mu_0 j_x; \quad (\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0})$$

$$\Delta A_y = -\mu_0 j_y; \quad (\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV')$$

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_z$$

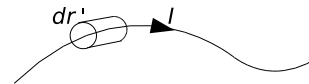
$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (\text{analog zu x und y})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

- Bei langen Drähten:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{I d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \text{rot} \left(\frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$



- x-Komponente:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{rot} \left(\frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Big|_x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{j_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{j_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= j_z(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - j_y(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{\partial}{\partial y} [(y - y')^2 + (z - z')^2 + (x - x')^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{j_z(\vec{r}')(\vec{r}' - \vec{r})_y - j_y(\vec{r}')(\vec{r}' - \vec{r})_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \boxed{\frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Big|_x} \end{aligned}$$

- Biot-Savart'sches Gesetz:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dV'$$

- Spezialfall: dünner Leiter

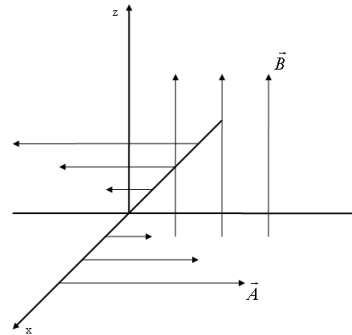
$$\vec{B} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \times I d\vec{r}'}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

4.2 Beispiele für das Vektorpotential

- a) homogenes B-Feld in z-Richtung

$$\vec{B} = (0; 0; B)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I) } \vec{A} = (0, xB; 0) \\ \text{II) } \vec{A} = (-yB; 0; 0) \\ \text{III) } \vec{A} = \left(-y\frac{B}{2}; x\frac{B}{2}; 0\right) \end{array} \right\} \text{div } \vec{A} = 0$$



- b) langer, stromdurchflossener Draht

- z-Achse längs des Drahtes

$$\text{I) } \Delta A_\rho(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_\rho(\rho, \varphi, z) = 0$$

$$\text{II) } \Delta A_\varphi(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_\varphi(\rho, \varphi, z) = 0$$

$$\text{III) } \Delta A_z(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_z(\rho, \varphi, z) = 0$$

⇒ I, II, III gültig für $\rho = 0$

- \vec{B} kann keine z-Komponente haben; $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$; $A_z \neq 0$
- \vec{B} ist rotationssymmetrisch um die z-Achse
- $\text{div } \vec{A} = 0$
- Ansatz:

$$\vec{A} = (0; 0; A_z)$$

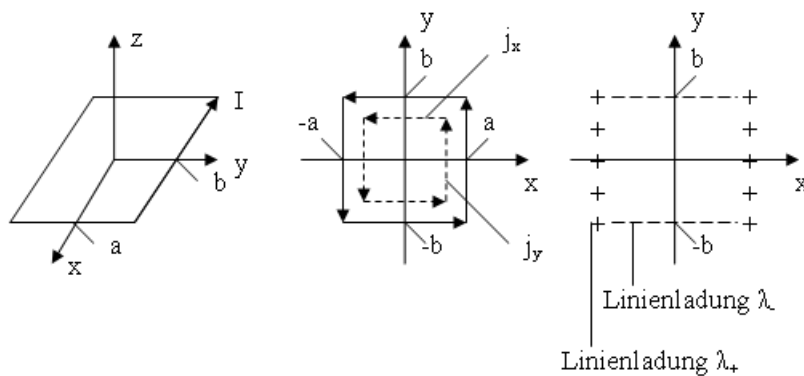
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = 0; \quad A_z = \alpha \ln \rho + \beta$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = -\alpha \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} d\vec{r} = -\frac{\alpha}{\rho} 2\pi\rho = \mu_0 I \Rightarrow \alpha = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho \vec{e}_z; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$$

c) stromdurchflossene rechteckige Schleife



$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\Delta A_x = -\mu_0 j_x$$

– Dipolmoment: (elektrostatistisch)

$$p_x = p_z = 0$$

$$p_y = -bQ_+ + bQ_- = -2bQ_+ = -2a2b\lambda_+$$

– Dipolmoment der x-Komponente des Vektorpotentials:

$$m_{x,y} = -2a2bI \quad (\text{magnetisches Drehmoment})$$

$$\Delta A_y = -\mu_0 j_y$$

$$p_x = aQ_+ - aQ_- = 2a2b\lambda_+$$

– Dipolmoment der y-Komponente des Vektorpotentials:

$$m_{y,x} = -2a2bI$$

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_z = 0$$

- Wähle $A_z = 0$, sonst konstant und linear abhängig
- Dipolnäherung:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-4abIy}{r^3}$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4abIx}{r^3}$$

$$A_z = 0$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}; \quad \vec{m} = 4abI\vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\Rightarrow B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m_z zx}{r^5}$$

$$\Rightarrow B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m_z zy}{r^5}$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi} m_z \left(-\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right)$$

5 Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

- Beschränkung auf Raumbereiche mit $\rho(\vec{r}) = 0$; $\vec{j}(\vec{r}) = 0$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta \vec{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \Psi(z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} \implies \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2}$$

- allgemeine Lösung:

$$\Psi(z, t) = f^+(z - ct) + f^-(z + ct); \quad f(u) = f(z \mp ct)$$

- Spezialfall: monochromatische, ebene Welle, die sich in positiver z-Richtung ausbreitet:

$$\Psi(z, t) = f^+(z - ct) = \cos(kz - \omega t) = \operatorname{Re} \left\{ e^{i(kz - \omega t)} \right\}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = k \quad (\text{Wellenzahl})$$

- dreidimensionale, ebene harmonische Welle, die sich in Richtung des Wellenzahlvektors \vec{k} ausbreitet:

$$\Psi(r, t) = \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) = \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}$$

- Ebene harmonische Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(z - ct)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(z - ct)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z(z - ct)}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow E_z(\vec{r}, t) = \text{const.} = E_z^0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow B_z(\vec{r}, t) = \text{const.} = B_z^0$$

- In Ausbreitungsrichtung besitzt weder das E-Feld noch das B-Feld eine zeitlich variierende Komponente

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} & \Rightarrow & \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} & \Rightarrow & \boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} & \Rightarrow & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \text{ (uninteressant)} \end{aligned}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}}$$

$$0 = 0 \text{ (uninteressant)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} & \Rightarrow \frac{\partial E_y(u)}{\partial u} = -c \frac{\partial B_x}{\partial u} & u = z - ct \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & \Rightarrow \frac{\partial E_x(u)}{\partial u} = c \frac{\partial B_y}{\partial u} \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} & \Rightarrow \frac{\partial B_y(u)}{\partial u} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial u} & \text{(überflüssig)} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} & \Rightarrow \frac{\partial B_x(u)}{\partial u} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial u} & \text{(überflüssig)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial u} &= -c \frac{\partial B_x}{\partial u} \\ \frac{\partial E_x}{\partial u} &= c \frac{\partial B_y}{\partial u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| E_y(u) &= -c B_x(u) + \text{const.} & (\text{const.} = E_y^0) \\ \| E_x(u) &= c B_y(u) + \text{const.} & (\text{const.} = E_x^0) \end{aligned}$$

- z.B.: $\vec{E}||x\text{-Achse} \Rightarrow E_y = 0 = E_z; B_x = 0 = B_z; E_x(z - ct) = cB_y(z - ct)$
- \Rightarrow Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen ($\vec{E} \perp \vec{B}$)
- ebene, monochromatische Wellen, die sich in z-Richtung ausbreiten:

$$0 = E_x = E_z = B_z = B_y$$

$$E_y(\vec{r}, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) = E_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(kz - \omega t)} \right\}$$

$$B_x(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}; \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \text{ (im Vakuum)}$$

- Energiedichte:

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

$$\begin{aligned} \mu_0 H^2 &= \frac{1}{\mu_0} B^2 = \frac{1}{\mu_0 c^2} E^2 \\ &= \epsilon_0 E^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu_0 H^2 = \epsilon_0 E^2$$

$$\Rightarrow \boxed{w(\vec{r}, t)} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \boxed{\epsilon_0 E^2}$$

$$w(\vec{r}, t) = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) = \epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2} [\cos(0) + \cos(2(kz - \omega t))]$$

- zeitlicher Mittelwert: $\langle w(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$
- Energiestromdichte: \vec{S}

$$\begin{aligned} \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} &= \frac{E_0^2}{c \mu_0} \cos^2(kz - \omega t) \vec{e}_z \\ &= c w(\vec{r}, t) \vec{e}_z; \frac{1}{c \mu_0} = \frac{c}{c^2 \mu_0} = c \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\mu_0} = \epsilon_0 c \end{aligned}$$

- Impulsdichte: $\vec{p}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c} w(\vec{r}, t) \vec{e}_z$

– klassisches Teilchen: $E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$

– relativistisches Teilchen:

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (cp)^2};$$

$$\text{für } m_0 \rightarrow 0: E \rightarrow cp$$

6 Quanten

6.1 Einordnung der Quantenmechanik

- $c \rightarrow$ Relativitätstheorie
- Energie in „Portionen“ \rightarrow Quantenmechanik
- Planck-Konstante: h , beziehungsweise $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ($\hbar\omega = h\nu$)

klassische Mechanik

$$\hbar \rightarrow 0; c \rightarrow \infty$$

Quantenmechanik

$$\hbar \neq 0; c \rightarrow \infty$$

klassische Elektrodynamik

relativistische Mechanik

$$\hbar \rightarrow 0; c \neq \infty$$

relativistische Quantenmechanik

Quantenfeldtheorie

$$\hbar \neq 0; c \neq \infty$$

6.2 Beispiele für Quanteneffekte

1. Strahlung schwarzer Körper
2. der photoelektrische Effekt
3. Compton Effekt
4. Emissionsspektrum von Atomen

1. Strahlung schwarzer Körper

- Spektrales Emissionsvermögen: $E_s(\omega, T)$ (von Einheitsfläche abgestrahlte Energie in Frequenzintervall $[\omega, \omega + d\omega]$)
- klassische Theorie: $E_s(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi c^2} kT$ ($k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$), Ultraviolettkatastrophe!

- Planck: Strahlungsenergie bei einer bestimmten Frequenz ω kann nur in Paketen (Quanten) ausgetauscht werden:

$$E = n\hbar\omega; \quad \hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

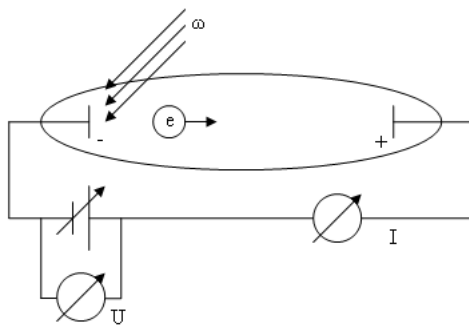
$$E_s(\hbar, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} = 1 + \frac{\hbar\omega}{kT} + \dots$$

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT} \quad (\text{einsetzen} \rightarrow \text{klassische Beziehung})$$

2. der photoelektrische Effekt

- 1887, Hertz (Karlsruhe)



- 1) Für $\omega < \omega_0$: $I = 0$; ω_0 (kathodenmetall)
- 2) Gegenspannung U für die $I = 0$ wird:
 - $U_s = \frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{e}$
 - $I > 0$ für $eU_s < E_{kin}$
- 3) Licht mit bestimmten ω ; $I \propto$ Intensität des Lichtes

•

$$E = \hbar\omega$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$$|\vec{p}|c = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} \rightarrow \text{relativistische Energie-Impulsbeziehung}$$

$$\Rightarrow \text{für } m \rightarrow 0 : E = \hbar\omega = |\vec{p}|c$$

$$\Rightarrow |\vec{p}| = \frac{\hbar}{c}\omega = \hbar|\vec{k}|$$

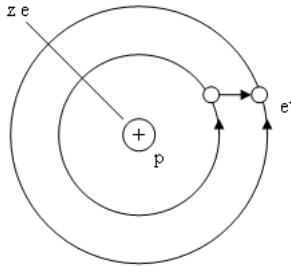
$$\Rightarrow \frac{\omega}{c} = |\vec{k}|$$

3. Compton Effekt

- Streuung von Licht an Elektronen
- ω_s (gestreutes Licht) $<$ ω (einfallendes Licht)

4. Emissionsspektrum von Atomen

- scharfe Linie im Emissionsspektrum
- Wasserstoff: $\frac{1}{\lambda} = \text{const.}; (\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}); n_1, n_2 \in \mathbb{N}; n_1 < n_2$

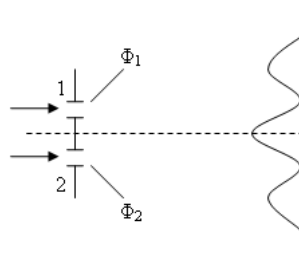


- Bohrsches Atommodell:
 - nur Elektronenbahnen mit Drehimpuls $n\hbar$; $n \in \mathbb{N}_0$
 - Kreisbahnen: $mvr = n\hbar$; $v =$ Bahngeschwindigkeit
 - auf diesen Bahnen Bewegung strahlungsfrei
 - Elektron kann von Bahn der Energie E auf Bahn mit Energie E' wechseln ($E - E' = \hbar\omega$)
 - Kreisbahnen im Coulomb-Zentralfeld

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ze^2}{r^2} + \frac{mv^2}{r} = 0; \quad \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}r^2m\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 \\
 \Rightarrow v^2 &= \frac{ze^2}{r} \frac{1}{m4\pi\epsilon_0} \\
 \Rightarrow mvr &= n\hbar \\
 \Rightarrow r &= \frac{n^2\hbar^2}{ze^2m4\pi\epsilon_0} \\
 \Rightarrow E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ze^2}{r} \\
 E &= \frac{1}{2}m \frac{ze^2}{r} \frac{1}{m4\pi\epsilon_0} - \frac{ze^2}{r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = -\frac{1}{2} \frac{ze^2}{r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\
 E &= -\frac{1}{2} \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{ze^2m4\pi\epsilon_0}{n^2\hbar^2} = -\frac{1}{2} \frac{z^2e^4m}{n^2\hbar^2} \\
 E(n=1) &= -\frac{1}{2} \frac{(ze^2)^2m}{\hbar^2} \\
 \Rightarrow \Delta E &= -\frac{1}{2} \frac{(ze^2)^2m}{\hbar^2} \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right]
 \end{aligned}$$

7 Dualismus Welle-Teilchen

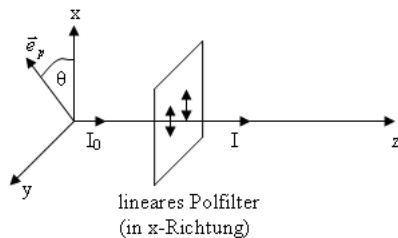
7.1 Doppelspalt



- Interferenz: I (Intensität) $\propto |\Phi|^2 \neq |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2$; ($\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$)
- kleine Lichtintensitäten (immer nur ein Photon im Experiment)
 - für kurze Belichtungszeiten: ein lokaler Fleck auf dem Schirm (Teilchenspalt)
 - für lange Belichtungszeiten: Interferenzmuster (Wellenspalt)

7.2 Spektralzerlegung und Fouriertransformation

- $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \vec{e}_p e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$; \vec{e}_p : Einheitsvektor der linearen Polarisation
- $\vec{e}_p^2 = 1$; $\vec{e}_p \vec{k} = 0$



- Energiestromdichte: $I = I_0 \cos^2 \Theta$
- Einzelnes Photon:
 - Photon passiert den Analysator, oder
 - Photon wird absorbiert
 - \Rightarrow Durchgangswahrscheinlichkeit: $\cos^2 \Theta$
- Interpretation:

- eine Messung ergibt nur bestimmte Resultate (Durchgang oder Absorption): Eigenwerte
- zu den Messresultaten gehören zwei Eigenvektoren $\vec{e}_p = \vec{e}_x$ und $\vec{e}_p = \vec{e}_y$
- ein beliebiger Vektor $\vec{e}_p = \vec{e}_x \cos \Theta + \vec{e}_y \sin \Theta$
- Quadrat der Koeffizienten gibt die Wahrscheinlichkeit für Durchgang ($\cos^2 \Theta$) oder Absorption ($\sin^2 \Theta$)
- Polarisationsrichtung nach Messung: \vec{e}_x

• Fouriertransformation

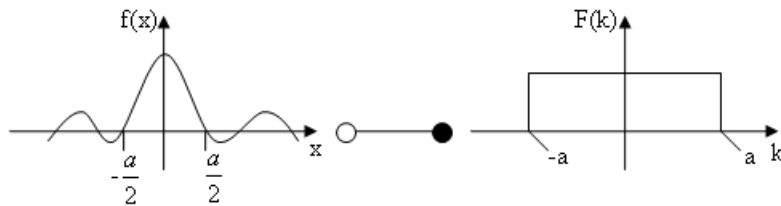
$$f(x, t = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

wenn $f(x, t = 0)$ gegeben:

$$\begin{aligned} F(k') &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t = 0) e^{-ik'x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \right] e^{-ik'x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(k-k')x} dx \right] dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx \right]}_{=2\pi\delta(k-k')} dk \end{aligned}$$

$$F(k') = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \delta(k - k') dk$$

• $f(x)$ \longleftrightarrow • $F(k)$



- Ausdehnung im Ortsraum: $\Delta x = \frac{2\pi}{a}$

- Breite der Verteilung: $\Delta k = 2a$
- $\Delta x \Delta k = \frac{2\pi}{a} 2a = 4\pi$

8 Materiewellen und Schrödingergleichung

- 1923 de Broglie: Hypothese der Materiewelle
- 1927 Darvisson, Germer: Interferenz von Elektronenstrahlen

8.1 Realisierung des Konzeptes der Materiewellen

1. Das Teilchen wird durch Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t)$ beschrieben
2. $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ wird als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert
 - $\rho(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$; $\rho(\vec{r}, t)dxdydz$
→ Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen in Volumen $dxdydz$ um den Ort \vec{r} zu Zeitpunkt t zu finden
 - $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}, t)dxdydz = 1$
3. Messung einer beliebigen Größe; es soll „Spektralzerlegung“ gelten
 - Eigenfunktion $\Psi_n(\vec{r})$ mit Eigenwert a_n
 - wenn $\Psi(\vec{r}, t_0) = \Psi_n(\vec{r})$ dann liefert Messung den Eigenwert a_n
 - $\Psi(\vec{r}, t_0) = \sum_n c_n \Psi_n(\vec{r})$ (Spektralzerlegung)
→ Messung liefert bestimmten Wert a_j mit Wahrscheinlichkeit $|c_j|^2$
 - Nach der Messung: Wenn Messergebnis a_j dann Wellenfunktion nach Messung: $\Psi_j(\vec{r})$ (Reduktion der Wellenfunktion)
4. • Zeitliche Entwicklung des Systems wird durch Schrödingergleichung beschrieben

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}; \frac{\vec{p}^2}{2m} = E = \hbar\omega; \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -i\omega \Psi(\vec{r}, t)$$

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \hbar\omega \Psi(\vec{r}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \Psi(\vec{r}, t)$$

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t)$$

⇒ Schrödingergleichung für ein freies Teilchen

- Verallgemeinerung: Teilchen in Potential $V(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \rightarrow E &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) = \hbar\omega \\ \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) &= \underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right]}_{\hat{H}: \text{Hamilton-Operator}} \Psi(\vec{r}, t) \\ \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) &= \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

8.2 Teilchen als Wellenpakete

- Ebene Welle: $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$; $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$; $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$
- Superpositionsprinzip: $\Phi(\vec{r}, t) = \int f(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}$
- Phasen- und Gruppengeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \vec{v}_p &= \frac{\omega(\vec{k})}{|\vec{k}|^2} k^2 = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} \\ &= \frac{\vec{p}}{2m} \\ \vec{v}_g &= \left(\frac{\partial}{\partial k_x}; \frac{\partial}{\partial k_y}; \frac{\partial}{\partial k_z} \right) \omega(\vec{k}) = \nabla_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) = \frac{\hbar}{m} (k_x, k_y, k_z) = \frac{\hbar \vec{k}}{m} \\ &= \frac{\vec{p}}{m} \end{aligned}$$

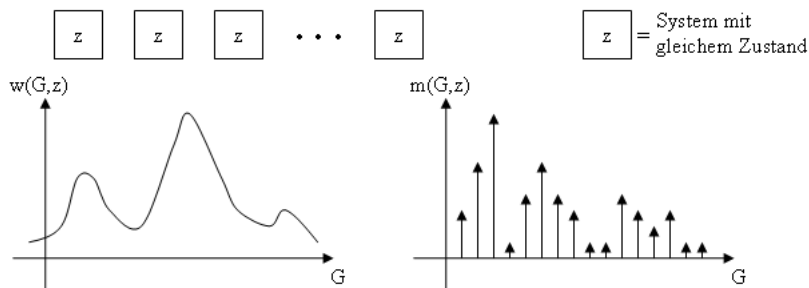
8.3 Heisenbergsche Unschärferelation

- Ebene Welle: keinerlei räumliche Lokalisierung aber sehr starke Lokalisierung des Impulses ($\vec{p} = \hbar \vec{k}$)
- $\Delta k \Delta x > 1$
- $\underline{\Delta p \Delta x} > \underline{\hbar} \geq \underline{\frac{\hbar}{2}}$

8.4 Zustand, Größe, Wert einer Größe

- Physikalische Größe „ \mathcal{G} “ (Observable) drückt quantitative Beziehung zwischen verschiedenen physikalischen Systemen aus
→ Beispiel: Energie, Impuls, Drehimpuls
- Naturvorgänge sind Übergänge zwischen Zuständen
→ stetig ablaufende Vorgänge (unendliche Folge inkrementaler Schritte): Prozesse

- Zustände: im allgemeinen nicht direkt beobachtbar
- der einer Observablen „ \mathcal{G} “ zugeordnete Messwert $W(\mathcal{G}, Z) = \langle \mathcal{G} \rangle$ ist eine Zahl; (Z =Zustand)
- in einem Zustand hat jede Observable einen festen Wert
- Prozessgröße: nicht dem Zustand zugeordnet, sondern einem Prozess als Ganzem (Beispiel: Wärme, Arbeit)
- Rolle der Zeit:
 - Observablen haben in jedem Zustand einen bestimmten Wert
 - Umgekehrt: das System befindet sich zu jedem Zeitpunkt in einem Zustand
 - Zeit dient der Anordnung von Zuständen
- Messung physikalischer Größen:
 - Einzelmessung: Ablesen eines Zahlenwerts von einem Messinstrument für die Größe „ \mathcal{G} “
 - Eigenwert von „ \mathcal{G} “: mögliche Zahlenwerte bei einer Einzelmessung (an einem bestimmten System)
 - Spektrum von „ \mathcal{G} “: Menge aller Einzelwerte
 - Messung: Wiederholung von Einzelmessungen an einem Ensemble (von gleichen und im gleichen Zustand befindlichen) Systemen)
 - nur eine Einzelmessung pro System
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $w(\mathcal{G}, Z)$



- Observable und deren Werte
 - \vec{r} -Wahrscheinlichkeitsdichte: $w(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$
 - Funktion $G(\vec{r})$:
 - * Wert von $G(\vec{r})$: $W(\mathcal{G}, \Psi) = \int w(\vec{r}, t) G(\vec{r}) d\vec{r}$
 $= \int \Psi^*(\vec{r}, t) G(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) d\vec{r}$ (W=Mittelwert)

$$* \int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1$$

– Erhaltung der Wahrscheinlichkeit:

$$* \frac{\partial}{\partial t} w(\vec{r}, t) + \text{div } j_w(\vec{r}, t) = 0 \quad (j_w = \text{Wahrscheinlichkeitsstrom})$$

– Impulsabhängige Größen (zum Beispiel: \vec{p} selbst):

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}; \quad i\vec{k} = \vec{\nabla}; \quad \vec{k} = -i\vec{\nabla}$$

$$W(\vec{p}, \Psi) = \int \Psi^*(\vec{r}, t) (-i\hbar \vec{\nabla}) \Psi(\vec{r}, t) d\vec{r}$$

$G(\vec{p}, \vec{r}, \dots) = \text{Funktion des Impulses}$

$$W(G(\vec{p}, \vec{r}), \Psi) = \int \Psi^*(\vec{r}, t) \hat{G}(\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}, \vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) d\vec{r}$$

$$(G(\vec{p}, \vec{r}) \xrightarrow{\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}} \hat{G}(\vec{p}, \vec{r}))$$

Größe	klassische Mechanik	Wellenmechanik
Ort	\vec{r}	$\vec{r} = \hat{r} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$
Impuls	\vec{p}	$\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$
– Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} = -i\hbar(\vec{r} \times \nabla)$
Energie	$H = \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m}}_{E_{kin}} + \underbrace{V(\vec{r})}_{E_{pot}}$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{r})$
beliebige Größe	$G(\vec{p}, \vec{r}, t)$	$\hat{G}(\hat{p}, \hat{r}, t) = \hat{G}(-i\hbar \vec{\nabla}, \vec{r}, t)$

• Reihenfolge von Operatoren im allgemeinen nicht vertauschbar

$$• \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}]$$

$$• [\hat{A}, \hat{B}] = \text{Kommutator}$$

• $\hat{A}\hat{B}$ = kurze Schreibweise für: $\int \Psi^* \hat{A}\hat{B} \Psi d\vec{r}$

$$[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x} = xy - yx = 0$$

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = \hat{p}_x \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}) - (i\hbar) \frac{\partial}{\partial y} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} = 0$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{x} = x(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}) - (-i\hbar \frac{\partial}{\partial y})x = 0$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x} = x(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) - (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})x = -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar(1 + x \frac{\partial}{\partial x}) = i\hbar$$

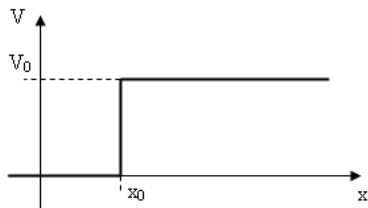
8.5 Zeitunabhängige Schrödingergleichung

- Beschreibung stationärer Zustände
 - Werte aller Observablen zeitlich konstant
 - zum Beispiel: $|\Psi(\vec{r}, t)| = \text{const.}(\vec{r})$
 - $\Psi_n(\vec{r}, t) = \Psi_n(\vec{r})e^{-i\omega_n t} = \Psi_n(\vec{r})e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$

•

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{H}\Psi_n(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_n(\vec{r}, t)}_{\text{Schrödingergleichung}} &= i\hbar\Psi_n(\vec{r})(-i\omega_n)e^{i\omega_n t} \\ &= E_n\Psi_n(\vec{r})e^{-i\omega_n t} \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right]\Psi_n(\vec{r})e^{-i\omega_n t} &= E_n\Psi_n(\vec{r})e^{-i\omega_n t} \\ \hat{H}\Psi_n(\vec{r}) &= E_n\Psi_n(\vec{r}) \end{aligned}$$

8.6 Stufenpotential



•

$$V(x) = V_0\Theta(x - x_0)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi}_{\Psi''} &= [E - V_0 \Theta(x - x_0)] \Psi \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \Psi''(x) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} [\Psi'(x_0 + \varepsilon) - \Psi'(x_0 - \varepsilon)] \\
&= \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} [E - V_0 \Theta(x - x_0)] \Psi(x) dx \\
&= E \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \Psi(x) dx - \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} V_0 \Theta(x - x_0) \Psi(x) dx \\
|\Psi(x)| &< K \quad (\text{K: Quadratintegabel})
\end{aligned}$$

Quadratintegabilität: $|\Psi(x)| < K$, $K \in$ reelle Zahlen

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| E \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \Psi(x) dx \right| \leq |E| K 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\
0 &\leq \left| V_0 \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \Theta(x - x_0) \Psi(x) dx \right| = \left| V_0 \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} \Psi(x) dx \right| < |V_0| K \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{für } V_0 \text{ endlich} \\
\Psi'(x_0 + \varepsilon) - \Psi'(x_0 - \varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\
\Rightarrow \Psi'(x_0) &\text{ ist stetig} \\
\Rightarrow \Psi(x_0) &\text{ ist stetig und differenzierbar (aus weiterer Integration)}
\end{aligned}$$

- konstantes Potential V_0

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 = E - V_0; \quad k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)}; \quad E - V_0 = E_{kin}$$

$E > V_0$: k ist reell

$E < V_0$: k ist rein imaginär

$$k = i\chi; \quad \chi = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

- ebene Welle

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \Psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (ik)^2 \Psi(x, t) \\ \Rightarrow \Psi(x, t) &= \Psi_0 e^{i(\chi x - \omega t)} = \Psi_0 e^{-\chi x - \omega t} \\ \Rightarrow \Psi(x) &= \Psi_0 e^{-\chi x} \text{ (zeitunabhängig)}\end{aligned}$$

- allgemein

$$\Psi(x) = \Psi_{0+} e^{ikx} + \Psi_{0-} e^{-ikx} \text{ (1-Dimensional: } V_0 \text{ konstant)}$$

- Annahme

– Teilchen läuft von links kommend auf Potentialstufe zu; Wahl von $x_0 = 0$

- Ansatz

$$\begin{aligned}x < 0: \Psi_-(x) &= \underbrace{e^{ik_- x}}_{\text{einfallend}} + \underbrace{Re^{-ik_- x}}_{\text{reflektiert}}; \quad k_- = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \\ x > 0: \Psi_+(x) &= \underbrace{Te^{ik_+ x}}_{\text{transmittiert}}; \quad k_+ = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)} \\ \Psi(x) &= \Psi_-(x)\Theta(-x) + \Psi_+(x)\Theta(x) \\ \Theta(x) &= \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \\ \Psi'_-(x) &= ik_- e^{ik_- x} - ik_- Re^{-ik_- x} \\ \Psi'_+(x) &= ik_+ Te^{ik_+ x}\end{aligned}$$

- Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned}\Psi_-(0) &= \Psi_+(0); \quad 1 + R = T \\ \Psi'_-(0) &= \Psi'_+(0); \quad k_-(1 - R) = k_+ T \\ k_-(1 - R) &= k_+ T = k_+(1 + R) \\ k_- - k_- R &= k_+ + k_+ R \\ k_- - k_+ &= k_- R + k_+ R \\ R &= \frac{k_- - k_+}{k_- + k_+} \\ T = 1 + R &= \frac{2k_-}{k_- + k_+}\end{aligned}$$

- Reflexionswahrscheinlichkeit

$$P_R = |R|^2 = \left| \frac{k_- - k_+}{k_- + k_+} \right|^2$$

- Transmissionswahrscheinlichkeit

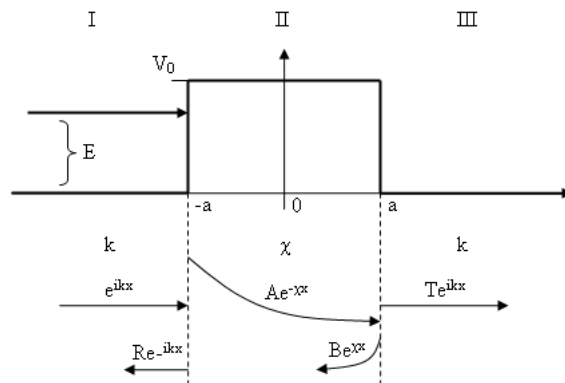
$$\begin{aligned} P_T &= 1 - P_R = 1 - \left| \frac{k_- - k_+}{k_- + k_+} \right|^2 = \frac{k_- + k_+}{k_- + k_+} - \left| \frac{k_- - k_+}{k_- + k_+} \right|^2 \\ &= T^2 \frac{k_+}{k_-} = \left| \frac{2k_-}{k_- + k_+} \right|^2 \frac{k_+}{k_-} \end{aligned}$$

a) $E < V_0$: $k_+ = i\chi'_+$; $P_R = \left| \frac{k_- - i\chi'_+}{k_- + i\chi'_+} \right|^2 = 1$
 $P_R = 1$; $\Psi_+(x) = e^{i(i\chi_+)x} = e^{-\chi_+x}$

b) $E > V_0$: k_-, k_+ : reell; $P_R > 0$ für $V_0 \neq 0$



- $E < V_0$: $P_R = 1$; $\Psi_+(x) = e^{i(i\chi_+)x} = e^{-\chi_+x}$



Tunneleffekt

- für $\chi 2a \gg 1$; Vereinfachung: $B = 0$
- $T = e^{-\chi 2a} = e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{m(V_0 - E)}}$
- $P_T = |T|^2 = e^{-\frac{4a}{\hbar} \sqrt{m(V_0 - E)}}$
- optisches Analogon:

